75.12/95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I
95.10 MODELACIÓN NUMÉRICA
95.13 MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMÉRICOS
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES – MÉTODOS DIRECTOS

Ing. Rodolfo A. Schwarz

Año 2021

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Índice

Introducción

- Muchos problemas que resuelve la ingeniería se expresan matemáticamente mediante **Sistemas de Ecuaciones Lineales**.
- Ejemplos:
  1. Circuitos eléctricos;
  2. Sistemas estructurales estáticos;
  3. Sistemas dinámicos;
  4. Problemas de transmisión del calor;
  5. Otros.

Introducción

- En forma genérica, un **Sistema de Ecuaciones Lineales** puede expresarse así:

$$\begin{aligned}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \ldots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + \ldots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad & \ldots \\
a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + a_{n3}\,x_3 + \ldots + a_{nn}\,x_n &= b_n
\end{aligned} \tag{1}$$

- O, en forma matricial (y abreviada):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}, \tag{2}$$

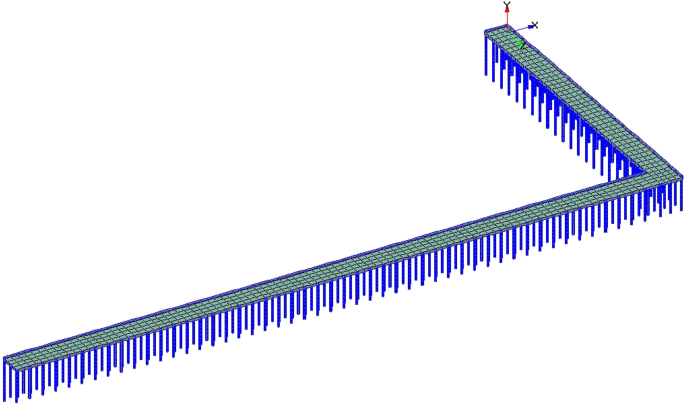
donde $\mathbf{A}$ es la *matriz de coeficientes*, $\mathbf{B}$ es el *vector de términos independientes* y $\mathbf{x}$ es el *vector de incógnitas*.

Introducción

- Matricialmente, la solución es:
$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B} \tag{3}$$
- Para que el sistema tenga solución, se debe cumplir que la matriz $\mathbf{A}$:
  - Sea cuadrada, es decir, ser una matriz de $n \times n$ dimensiones.
  - Sea *No Singular*, es decir, $\det \mathbf{A} \neq 0$ o $\mathrm{rango}(\mathbf{A}) = n$.
- Sin embargo, no siempre es fácil obtener $\mathbf{A}^{-1}$.
- Tampoco suele ser práctico calcular $\mathbf{A}^{-1}$ cuando n es muy grande.
- Por lo tanto, resolver en forma matricial un sistema de ecuaciones lineales muy grande no es posible incluso con programas desarrollados para el Álgebra Lineal.

Introducción

- Veamos, por ejemplo, este modelo estructural:



Introducción

- El modelo se resuelve mediante el *Método de los Elementos Finitos*.
- La cantidad de incógnitas es 15.957 , como se indica en el archivo de salida:
  PROBLEM STATISTICS

  \- - - - - - - - - - - - - - - - - -

  NUMBER OF JOINTS/MEMBER+ELEMENTS/SUPPORTS = 2696/ 3127/ 1459
  ORIGINAL/FINAL BAND-WIDTH= 2205/ 29/ 178 DOF
  TOTAL PRIMARY LOAD CASES = 10,
  $\boxed{\text{TOTAL DEGREES OF FREEDOM = 15957}}$
  SIZE OF STIFFNESS MATRIX = 2841 DOUBLE KILO-WORDS
  REQRD/AVAIL. DISK SPACE = 51.7/ 179703.5 MB
- Analicemos formas alternativas para resolver este tipo de sistemas de ecuaciones lineales.

Introducción

- Supongamos un sistema sencillo de resolver:

$$\begin{bmatrix} u_{1\,1} & u_{1\,2} & \cdots & \cdots & u_{1\,n} \\ 0 & u_{2\,2} & u_{2\,3} & \cdots & u_{2\,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & u_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_{n\,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

- Se trata de un sistema triangular, pues la matriz $\mathbf{A}$ es *triangular superior*.

Introducción

- La solución la obtenemos con el siguiente procedimiento:

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{b_n}{u_{n\,n}}, \\
x_{n-1} &= \frac{b_{n-1} - u_{n-1\,n} x_n}{u_{n-1\,n-1}}, \\
x_{n-2} &= \frac{b_{n-2} - u_{n-2\,n} x_n - u_{n-2\,n-1} x_{n-1}}{u_{n-2\,n-2}}, \\
&\ldots\ldots \\
x_i &= \frac{b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} u_{i\,j}\, x_j}{u_{i\,i}}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Introducción

- Otro sistema sencillo de resolver es:

$$\begin{bmatrix} l_{1\,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{2\,1} & l_{2\,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n\,1} & \cdots & \cdots & l_{n\,n-1} & l_{n\,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{6}$$

- En este caso la matriz $\mathbf{A}$ es *triangular inferior*.

Introducción

- El siguiente procedimiento nos permite obtener la solución:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1}{l_{1\,1}}, \\
x_2 &= \frac{b_2 - l_{2\,1} x_1}{l_{2\,2}}, \\
x_3 &= \frac{b_3 - l_{3\,1} x_1 - l_{3\,2} x_2}{l_{3\,3}}, \\
&\cdots\cdots \\
x_i &= \frac{b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} l_{i\,j}\, x_j}{l_{i\,i}}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Introducción

- Ambos sistemas podemos resolverlos sin invertir la matriz $\mathbf{A}$.
- El primer caso se conoce como *Sustitución Inversa*.
- El segundo, como *Sustitución Directa*.
- Eso es una gran ventaja para una solución numérica del problema.
- Por lo tanto, una forma conveniente para resolver un *Sistema de Ecuaciones Lineales* general, sería convertirlo en un sistema triangular para no tener que invertir la matriz $\mathbf{A}$.
- Este conjunto de métodos, que transforman la matriz $\mathbf{A}$ en una matriz triangular, se conocen como *Métodos Directos*.

Método de Eliminación de Gauss

- El método más conocido de los *Métodos Directos* es el **Método de Eliminación de Gauss**.
- Consiste en transformar una matriz **A** cualquiera en una nueva matriz **U**, es decir, en una *Matriz Triangular Superior*:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{U} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{1\,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n\,n} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} u_{1\,1} & u_{1\,2} & \cdots & \cdots & u_{1\,n} \\ 0 & u_{2\,2} & u_{2\,3} & \cdots & u_{2\,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & u_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_{n\,n} \end{bmatrix}$$

Método de Eliminación de Gauss

- El nuevo sistema será entonces:

$$\begin{bmatrix} u_{1\,1} & u_{1\,2} & \cdots & \cdots & u_{1\,n} \\ 0 & u_{2\,2} & u_{2\,3} & \cdots & u_{2\,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & u_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_{n\,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n^* \end{bmatrix} \tag{8}$$

- Transformamos al sistema original en un sistema triangular superior.
- Resolver este sistema transformado es fácil, pues basta aplicar la *Sustitución Inversa*.

Método de Eliminación de Gauss

- El procedimiento para obtener la matriz triangular superior es:
  1. Tomar la matriz A y ampliarla con el vector B (agregar B como la columna $n+1$);
  2. Fijar la primera fila de de la matriz A ampliada;
  3. Transformar las filas 2 a n, de manera de que los coeficientes $a_{j\,1}$ se anulen, es decir, «pivotar» con $a_{1\,1}$;
  4. Fijar la siguiente fila y repetir el paso anterior, pero con las filas 3 a n, «pivotando» con $a_{i\,i}$;
  5. Repetir el paso anterior hasta obtener una matriz triangular superior.
- Los algoritmos son:
  - Coeficientes $a_{2\,j}$ y b_2:

$$m_{2\,1} = \frac{a_{2\,1}}{a_{1\,1}} \;\rightarrow\; u_{2\,j} = a_{2\,j} - m_{2\,1}\,a_{1\,j}; \quad b_2^* = b_2 - m_{2\,1}\,b_1. \tag{9}$$

  - Coeficientes $a_{k\,j}$ y b_k:

$$m_{k\,j} = \frac{a_{k\,j}}{a_{k\,k}} \;\rightarrow\; u_{k\,j} = a_{k\,j} - m_{k\,j}\,a_{k\,j}; \quad b_k^* = b_k - m_{k\,j}\,b_j. \tag{10}$$

Método de Eliminación de Gauss

- Pueden aparecer problemas al transformar la matriz $\mathbf{A}$.
- Un caso es cuando un $u_{j\,j}$ resulta nulo. Supongamos que $u_{2\,2}$ sea cero luego de la primer transformación:

$$\begin{bmatrix} u_{1\,1} & u_{1\,2} & \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & u_{1\,n} & | & b_1 \\ 0 & \mathbf{0} & u_{2\,3} & u_{2\,4} & \cdots & u_{2\,n} & | & b_2 \\ \vdots & u_{3\,2} & u_{3\,3} & u_{3\,4} & \cdots & u_{3\,n} & | & b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & u_{n-1\,n} & | & b_{n-1} \\ 0 & u_{n\,1} & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots} & u_{n\,n-1} & u_{n\,n} & | & b_n \end{bmatrix} \tag{11}$$

- Al anularse, como es parte de la diagonal principal, no podemos seguir transformando la matriz.

Método de Eliminación de Gauss

- Esta situación la resolvemos intercambiando filas de la matriz ampliada. En este caso, intercambiamos las filas 2 y 3.

$$\begin{bmatrix} u_{1\,1} & u_{1\,2} & \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & u_{1\,n} & | & b_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{u_{3\,2}} & \mathbf{u_{3\,3}} & \mathbf{u_{3\,4}} & \cdots & \mathbf{u_{3\,n}} & | & \mathbf{b_3} \\ \vdots & 0 & \mathrm{u_{2\,3}} & \mathrm{u_{2\,4}} & \cdots & \mathrm{u_{2\,n}} & | & \mathrm{b_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & u_{n-1\,n} & | & b_{n-1} \\ 0 & u_{n\,1} & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots} & u_{n\,n-1} & u_{n\,n} & | & b_n \end{bmatrix} \tag{12}$$

- Podemos generalizar el procedimiento si un $u_{l\,j}$ se anula; seleccionamos la fila k con el $u_{k\,j}$ más conveniente, para un j determinado y así reemplazamos el coeficiente nulo.
- Este procedimiento se denomina **Eliminación de Gauss con Pivoteo Parcial** (**EGPP**).

Método de Eliminación de Gauss

- En algunos casos debemos intercambiar filas y columnas de la matriz original $\mathbf{A}$.
- Ese nuevo procedimiento se conoce como **Eliminación de Gauss con Pivoteo Total** (**EGPT**).
- Si se diere el caso de que una fila completa de $\mathbf{A}$ se anulare, entonces es un comprobación de que esa matriz no tiene inversa porque el rango es menor a n.
- En esos casos, no hay forma de obtener una solución del sistema de ecuaciones lineales.
- Pueden darse dos casos:
  1. Si el vector $\mathbf{B}$ es combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$, entonces hay infinitas soluciones.
  2. Caso contrario, no existe solución.

Método de Eliminación de Gauss

- Veamos la cantidad de operaciones que requiere el *Método de Eliminación de Gauss*, incluyendo la *Sustitución Inversa*, sin pivoteos:
  - Multiplicaciones y divisiones:

$$\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}+\frac{n^2+n}{2}=\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3}. \tag{13}$$

  - Sumas y restas:

$$\frac{n^3-n}{3}+\frac{n^2-n}{2}=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}. \tag{14}$$

  - Total:

$$\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3}+\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}=\boxed{\frac{2n^3}{3}+\frac{3n^2}{2}-\frac{7n}{6}}. \tag{15}$$

Método de Eliminación de Gauss

- Aplicar *Eliminación de Gauss* tiene estas ventajas:
  1. El resultado final debería ser «exacto», salvo por el error de redondeo;
  2. La cantidad de operaciones a realizar es finita.
- Pero también tiene desventajas:
  1. Aplicar el pivoteo parcial o el pivoteo total lo vuelven lento;
  2. Si se tienen varios vectores $\mathbf{B}$, debería hacerse la transformación de $\mathbf{A}$ para cada vector $\mathbf{B}$.
- Esta última desventaja puede salvarse cuando los vectores $\mathbf{B}^{\langle k \rangle}$ son independientes, ampliando la matriz $\mathbf{A}$ con todos los vectores $\mathbf{B}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c|c} a_{1\,1} & \cdots & \cdots & a_{1\,n} & b_1^{\langle 1 \rangle} & \cdots & b_1^{\langle k \rangle} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & \cdots & a_{n\,n} & b_n^{\langle 1 \rangle} & \cdots & b_n^{\langle k \rangle} \end{array}\right] \tag{16}$$

Método de Eliminación de Gauss

- Este procedimiento no es posible si los vectores $\mathbf{B}^{\langle k \rangle}$ para $k > 1$ dependen de la solución del sistema con $\mathbf{B}^{\langle 1 \rangle}$.
- En ese caso, deberíamos repetir todo el procedimiento para cada vector $\mathbf{B}$.
- Un esquema de este tipo no resulta práctico, además de ser ineficiente.
- La idea es buscar un nuevo procedimiento que no repita la transformación de la matriz $\mathbf{A}$.
- Sería conveniente que este nuevo procedimiento se basara en el *Método de Eliminación de Gauss*.

Factorización LU

- Para hallar este nuevo procedimiento, vamos a expresar la matriz $\mathbf{A}$ mediante dos matrices:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}. \tag{17}$$

  donde $\mathbf{L}$ es una *Matriz Triangular Inferior* y $\mathbf{U}$ es una *Matriz Triangular Superior*.
- En este caso, el problema se resuelve mediante dos sustituciones:

$$\mathbf{L} \cdot (\underbrace{\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}}_{\mathbf{y}}) = \mathbf{B} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{B} & \text{Sustitución Directa,} \\ \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} & \text{Sustitución Inversa.} \end{cases} \tag{18}$$

- Veamos cómo obtener ambas matrices.

Factorización LU

- En la primera ecuación, el sistema está formado por:

$$\begin{bmatrix} l_{1\,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{2\,1} & l_{2\,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n\,1} & \cdots & \cdots & l_{n\,n-1} & l_{n\,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{19}$$

- Con este sistema obtenemos el vector $\mathbf{y}$.

Factorización LU

- En la segunda ecuación, el sistema está formado por:

$$\begin{bmatrix} u_{1\,1} & u_{1\,2} & \cdots & \cdots & u_{1\,n} \\ 0 & u_{2\,2} & u_{2\,3} & \cdots & u_{2\,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & u_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_{n\,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{20}$$

- Con este sistema obtenemos finalmente el vector $\mathbf{x}$.

Factorización LU

- Esta forma diferente de plantear y resolver el sistema se conoce como *Factorización LU*.
- Consiste en obtener dos matrices, $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$.
- Para obtener $\mathbf{U}$, aprovechemos el *Método de Eliminación de Gauss*, que transforma $\mathbf{A}$ en una *Matriz Triangular Superior*, $\mathbf{U}$.
- Falta cómo obtener la matriz $\mathbf{L}$, *Matriz Triangular Inferior*.
- Para obtenerla, impongamos que todos los coeficientes de la diagonal principal de $\mathbf{L}$ sean iguales a 1, es decir, $l_{i\,i} = 1$.

Factorización LU

- Con esta suposición podemos obtener los restantes coeficientes de $\mathbf{L}$:

$$l_{1\,1} = 1, \tag{21}$$

$$l_{2\,1}\,u_{1\,1} = a_{2\,1} \;\Rightarrow\; l_{2\,1} = \frac{a_{2\,1}}{u_{1\,1}} = \frac{a_{2\,1}}{a_{1\,1}} = m_{2\,1}, \tag{22}$$

$$l_{3\,1}\,u_{1\,1} = a_{3\,1} \;\Rightarrow\; l_{3\,1} = \frac{a_{3\,1}}{u_{1\,1}} = \frac{a_{3\,1}}{a_{1\,1}} = m_{3\,1}, \tag{23}$$

$$\ldots$$

$$l_{3\,1}\,u_{1\,2} + l_{3\,2}\,u_{2\,2} = a_{3\,2} \;\Rightarrow\; l_{3\,2}\,u_{2\,2} = a_{3\,2} - l_{3\,1}\,u_{1\,2} = a_{3\,2} - l_{3\,1}\,a_{1\,2},$$

$$l_{3\,2} = \frac{a_{3\,2} - l_{3\,1}\,a_{1\,2}}{u_{2\,2}} = \frac{a^*_{3\,2}}{a^*_{2\,2}} = m_{3\,2}. \tag{24}$$

Factorización LU

- En consecuencia, la matriz $\mathbf{L}$ se forma con los coeficientes $m_{j\,i}$ de *Eliminación de Gauss* y, por lo tanto, resulta ser:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{2\,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n\,1} & \cdots & \cdots & m_{n\,n-1} & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

- Esta forma de obtener las matrices $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ se conoce como *Método de Doolittle*.
- Por aplicar *Eliminación de Gauss*, el método suele expresarse como:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U},$$

con $\mathbf{P}$, *matriz de permutación*.

Método de Cholesky

- Hay otra forma de factorización de la matriz $\mathbf{A}$.
- Supongamos que la matriz $\mathbf{A}$ es simétrica, es decir, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.
- En este caso podemos factorizar $\mathbf{A}$ de la siguiente forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L}^T, \tag{26}$$

  donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal con $d_{i\,i} \neq 0$ y $d_{i\,j} = 0$.
- Si además los $d_{i\,i} > 0$, entonces podemos definir que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \sqrt{\mathbf{D}} \cdot \sqrt{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{L}^T, \tag{27}$$

- Para que esto se cumpla, la matriz $\mathbf{A}$ debe ser *definida positiva* ($\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} > 0$ para $\mathbf{x} \neq 0$).
- Entonces podemos hacer:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{L} \cdot \sqrt{\mathbf{D}}) \cdot (\sqrt{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{L}^T) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^T, \tag{28}$$

Método de Cholesky

- Esta factorización es conocida como *Método de Cholesky*:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^T \cdot x = \mathbf{B}. \tag{29}$$

- Los coeficientes de la matriz $\mathbf{S}$ se obtienen con las siguientes expresiones:

$$s_{i\,i} = \sqrt{a_{i\,i} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{i\,k}^2}, \tag{30}$$

$$s_{j\,i} = \frac{a_{j\,i} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{j\,k} \cdot s_{k\,i}}{s_{i\,i}} \tag{31}$$

Condición de una matriz

- Analicemos como inciden los errores de los datos en la solución del sistema.
- Supongamos que definimos lo siguiente:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} q_{i\,j} \cdot b_j, \tag{32}$$

donde $q_{i\,j}$ representa a los coeficientes de $\mathbf{A}^{-1}$, puesto que matricialmente $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$.

- Hagamos lo siguiente:

$$s_{i\,j} = q_{i\,j} \cdot b_j,$$
$$x_i = \sum_{j=1}^{n} s_{i\,j}.$$

Condición de una matriz

- El error relativo para el primer valor es:

$$er_{s_{i\,j}} = er_{q_{i\,j}} + er_{b_j} + \mu_j. \tag{33}$$

- El error absoluto está dado por:

$$E_{s_{i\,j}} = b_j \cdot E_{q_{i\,j}} + q_{i\,j} \cdot E_{b_j} + q_{i\,j} \cdot b_j \cdot \mu_j \tag{34}$$

- Por lo tanto, el error absoluto de x_i es:

$$E_{x_i} = \sum_{j=1}^{n} \left(b_j \cdot E_{q_{i\,j}} + q_{i\,j} \cdot E_{b_j} \right) + \sum_{j=1}^{n} q_{i\,j} \cdot b_j \cdot \mu_j. \tag{35}$$

Condición de una matriz

- El error relativo de x_i es:

$$er_{x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j \cdot E_{q_{i\,j}} + q_{i\,j} \cdot E_{b_j}}{x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{q_{i\,j} \cdot b_j}{x_i} \cdot \mu_j + \sum_{k=2}^{n} \mu_k. \tag{36}$$

- Al operar algebraicamente obtenemos:

$$er_{x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_{i\,j} \cdot b_j}{x_i} (er_{q_{i\,j}} + er_{b_j}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{q_{i\,j} \cdot b_j}{x_i} \cdot \mu_j + \sum_{k=2}^{n} \mu_k. \tag{37}$$

- Si reordenamos los términos, tenemos:

$$er_{x_i} = \sum_{j=1}^{n} C_{p_{i\,j}} (er_{q_{i\,j}} + er_{b_j}) + \sum_{j=1}^{n} T_{e_{i\,j}} \cdot \mu_j \tag{38}$$

Condición de una matriz

- Definimos que:

$$er_{q_{i\,j}},\ er_{b_j} \le r, \qquad \mu_j,\ \mu_k \le \varepsilon. \tag{39}$$

- Eso nos deja que:

$$er_{x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_{i\,j} \cdot b_j}{x_i}(r + r) + \sum_{j=1}^{n} \frac{q_{i\,j} \cdot b_j}{x_i} \cdot \varepsilon + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon, \tag{40}$$

con lo cual tenemos:

$$C_{p_{i\,j}} = 2\frac{q_{i\,j} \cdot b_j}{x_i}, \tag{41}$$

$$T_{e_{i\,j}} \approx \frac{q_{i\,j} \cdot b_j}{x_i} + 1 \tag{42}$$

Condición de una matriz

- De lo anterior, vemos que la condición del problema depende de $A(A^{-1})$ y de B, como debería ser.
- Ahora, supongamos que al resolver un *Sistema de Ecuaciones Lineales* obtenemos una solución aproximada. Entonces tendremos:

$$\mathbf{R} = \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} \;\Rightarrow\; \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\delta} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R}, \tag{43}$$

  con $\mathbf{x}$, solución «exacta», $\mathbf{R}$, residuo, y $\boldsymbol{\delta}$, error de $\hat{\mathbf{x}}$.
- Para evaluar el error tomemos alguna norma, por ejemplo, la infinita. Y analicemos con esta norma $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$:

$$\left\| \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \right\|_\infty = \left\| \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} \right\|_\infty \leq \left\| \mathbf{A}^{-1} \right\|_\infty \cdot \left\| \mathbf{R} \right\|_\infty . \tag{44}$$

Condición de una matriz

- Con la «norma infinito», podemos analizar el error relativo.
- Ahora, analicemos $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ con la «norma infinito»:

$$\|\mathbf{B}\|_\infty = \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{A}\|_\infty \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty \;\Rightarrow\; \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \frac{\|\mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{B}\|_\infty}. \tag{45}$$

- El error relativo resulta ser:

$$\frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \|\mathbf{A}\|_\infty \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_\infty \frac{\|\mathbf{R}\|_\infty}{\|\mathbf{B}\|_\infty} \tag{46}$$

que podemos escribir también así:

$$\frac{\|\boldsymbol{\delta}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \|\mathbf{A}\|_\infty \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_\infty \frac{\|\mathbf{R}\|_\infty}{\|\mathbf{B}\|_\infty} \tag{47}$$

Condición de una matriz

- Por supuesto, no conocemos $\mathbf{x}$ pero sí conocemos $\mathbf{R}$, pues $\mathbf{R} = \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}$.
- Podemos relacionar $\boldsymbol{\delta}$ con $\mathbf{R}$ mediante $\|\mathbf{A}\|_\infty \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_\infty$.
- Lo mismo podemos hacer con el error relativo de $\boldsymbol{\delta}$ y el error relativo de $\mathbf{R}$.
- Queda de esta forma:

$$er_{\boldsymbol{\delta}} = \frac{\|\boldsymbol{\delta}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \|\mathbf{A}\|_\infty \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_\infty \frac{\|\mathbf{R}\|_\infty}{\|\mathbf{B}\|_\infty} = \|\mathbf{A}\|_\infty \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_\infty er_{\mathbf{R}}. \tag{48}$$

- Vemos que $\|\mathbf{A}\|_\infty \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_\infty$ relaciona dos errores relativos. Por lo tanto, es equivalente al número de condición.
- Llamamos *condición de una matriz* a $\|\mathbf{A}\|_\infty \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_\infty$ y la definimos como $\kappa(\mathbf{A})$ para el caso de la norma infinito:

$$\boxed{\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_\infty \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_\infty}. \tag{49}$$

Condición de una matriz

- Analicemos la *condición de una matriz*.
- Como relaciona al residuo $\mathbf{R}$ con el error $\boldsymbol{\delta}$, podemos establecer varios casos.
  1. Lo ideal para que no se propaguen los errores en forma descontrolada es que:

$$\boxed{\kappa(\mathbf{A}) = 1}. \tag{50}$$

  2. En rigor, para no propagar al error relativo de $\mathbf{R}$, lo que debe cumplirse es que

$$\boxed{\kappa(\mathbf{A}) \not\gg 1}, \tag{51}$$

  es decir, $\kappa(\mathbf{A})$ no debe ser mucho mayor que 1. Cuando esto ocurra, diremos que la matriz está *bien condicionada*.

  3. También se define que una matriz es *singular* cuando

$$\boxed{\kappa(\mathbf{A}) \to \infty}, \tag{52}$$

Condición de una matriz

- Finalmente, cuando

$$\kappa(\mathbf{A}) \ggg 1, \tag{53}$$

es decir, $\kappa(\mathbf{A})$ mucho mayor que 1, diremos que la matriz está *mal condicionada*, y nuestra solución aproximada puede no ser una buena aproximación.

- Podemos extender nuestro análisis al caso en que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tengan errores inherentes con esta expresión:

$$\frac{\|\boldsymbol{\delta}_E\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \|\mathbf{A}\|_\infty \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_\infty \left(\frac{\|\boldsymbol{\delta}\mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty} + \frac{\|\boldsymbol{\delta}\mathbf{B}\|_\infty}{\|\mathbf{B}\|_\infty} \right). \tag{54}$$

- También puede extenderse a la propagación de los errores de redondeo:

$$\frac{\|\boldsymbol{\delta}_\mu\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \|\mathbf{A}\|_\infty \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_\infty \cdot 1{,}01(n^3 + 3n^2) \max \frac{|a_{i\,j}|}{\|\mathbf{A}\|_\infty} \mu \tag{55}$$

Método del Refinamiento Iterativo de la Solución

- Cuando tenemos el caso de un matriz *mal condicionada* podemos mejorar nuestra aproximación.
- Vimos que
$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R},$$
y que
$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}.$$
- De esta última nos queda
$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\delta},$$
que nos permite mejorar nuestra aproximación inicial, $\hat{\mathbf{x}}$, si calculamos $\boldsymbol{\delta}$.
- Este forma de mejorar el resultado se conoce como *Método del Refinamiento Iterativo de la Solución*.

Método del Refinamiento Iterativo de la Solución

- Para sistematizar el método, partamos que $\mathbf{x}^{\langle 1\rangle} = \hat{\mathbf{x}}$. Entonces:

$$\mathbf{R}^{\langle 1\rangle} = \mathbf{B} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^{\langle 1\rangle}, \tag{56}$$

- Con $\mathbf{R}^{\langle 1\rangle}$ podemos calcular $\boldsymbol{\delta}^{\langle 1\rangle}$ con el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\delta}^{\langle 1\rangle} = \mathbf{R}^{\langle 1\rangle}. \tag{57}$$

- Con $\boldsymbol{\delta}^{\langle 1\rangle}$ podemos obtener una nueva aproximación de $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}^{\langle 2\rangle} = \mathbf{x}^{\langle 1\rangle} + \boldsymbol{\delta}^{\langle 1\rangle}. \tag{58}$$

- Si generalizamos la expresión, tenemos:

$$\mathbf{x}^{\langle n+1\rangle} = \mathbf{x}^{\langle 1\rangle} + \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{\delta}^{\langle j\rangle}. \tag{59}$$

Método del Refinamiento Iterativo de la Solución

- Podemos determinar que la solución «exacta» es:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\langle 1 \rangle} + \sum_{j=1}^{n \to \infty} \boldsymbol{\delta}^{\langle j \rangle}. \tag{60}$$

- Como no podemos ejecutar un procedimiento con «*infinitos pasos*», adoptaremos un criterio de interrupción dado por

$$\|\boldsymbol{\delta}^{\langle n \rangle}\|_\infty \leq \mathsf{Tol}, \tag{61}$$

donde «Tol» es la *tolerancia* que imponemos.

Bibliografía

Burden, R. L., Faires, J. D. & Burden, A. M.
Análisis Numérico.
Décima Edición. CENGAGE Learning, 2016.

Samarski, A. A.
Introducción a los métodos numéricos.
Editorial Mir. 1986.

Schwarz, R.
Resumen de clases.